

Stichting
MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
Amsterdam

TW 11

Een berekeningsmethode voor de vorm van de poolschoenen
van een electromagneet bij overgeschreven veld
in een symmetrievlak

R. Timman

22 januari 1951

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Afd. TOEGEPASTE WISKUNDE

Rap. T.W.11

Auteur: R. Timman

Titel: Een berekeningsmethode voor de vorm van de
poolschoenen van een electromagneet bij emer-
geschreven veld in een symmetrievlak.

Datum: 22 Januari 1951.

INHOUD

1. Inleiding.
2. Oplossing van een vereenvoudigd probleem.
3. Oplossing van een beter bij de werkelijkheid aan-
sluitend probleem.

1. INLEIDING

Bij de constructie van een electromagneet voor een electronengenerator trad het volgende probleem op.

Gevraagd wordt de vorm van de poolschoenen van een electromagneet te bepalen, zodanig dat het ontstane veld, dat van boven en beneden begrensd is door de poolschoenen en verticaal door de cilindrische spoelen van de magneet, cylindersymmetrie vertoont en bovendien symmetrisch is t.o.v. een horizontaal vlak. Bovendien is, ter verkrijging van zekere focusseringseffekten voor een electronenbundel, die vanuit zeker punt in dat vlak met zekere snelheid wordt uitgezonden, de intensiteit van het veld in dit symmetrievlak voorgeschreven.

Allereerst valt op te merken, dat gezien de grote waarde van de permeabiliteit van ijzer alle krachtlijnen vrijwel loodrecht op het oppervlak zullen uittreden, zodat bij benadering het oppervlak van de poolschoenen de vorm zal hebben van een equipotentiaalvlak, behorende bij de potentiaal, die ~~dit~~ ^{door} de voorgeschreven veldsterkte in het symmetrievlak wordt opgeleverd.

In het veld, begrensd door de poolschoenen en door de spoelen, voldoet de magnetische veldvector H aan de vergelijkingen

$$\operatorname{div} H = 0$$

en, daar in dat veld geen elektrische stromen aanwezig zijn, ook aan

$$\operatorname{rot} H = 0$$

Hieruit volgt, dat een magnetostatische potentiaal φ bestaat, zodanig dat

$$H = \operatorname{grad} \varphi,$$

terwijl φ voldoet aan de vergelijking van Laplace

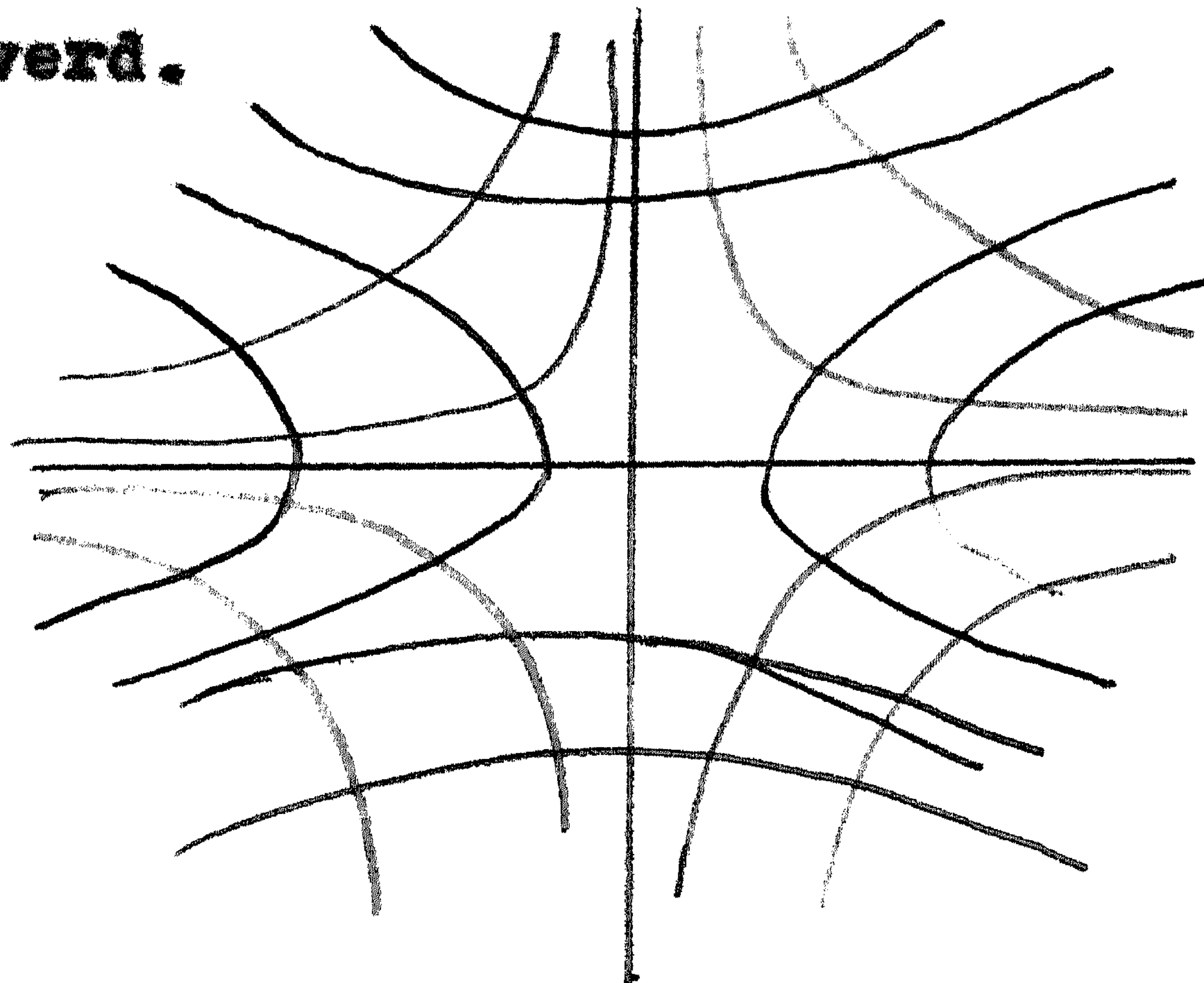
$$\Delta \varphi = 0$$

Voeren wij cylinderecoördinaten in (r, z) , dan zijn de opgelegde eisen in het symmetrievlak $z = 0$

$$H_r = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f(r)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = H_z = 0$$

waarbij, wegens de rotatiesymmetrie $f(r)$ een oneven functie van r moet zijn, waarvan verondersteld wordt, dat



analytisch is en dus een reeksontwikkeling van de vorm

$$H_r = \alpha_1 r + \alpha_2 r^3 + \alpha_3 r^5 + \dots = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} r^{2\nu-1}$$

toelaat. In de toepassingen worden slechts een eindig aantal termen van deze reeks gebruikt, zodat wij steeds zullen veronderstellen, dat

$$f(r) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} r^{2\nu-1} = \alpha_1 r + \alpha_2 r^3 + \dots + \alpha_n r^{2n-1} \quad (1)$$

Wij geven nu twee verschillende schematiseringen van het probleem met de bijbehorende oplossing.

In de eerste wordt eenvoudigheidshalve de verticale begrenzing van het veld weggelaten, zodat de door (1) gegeven veldsterkte in het gehele horizontale vlak geldig wordt verondersteld. Het blijkt dan op zeer eenvoudige wijze mogelijk te zijn het bijbehorende veld in de gehele ruimte te berekenen.

Bij de tweede schematisering, die beter met de realiteit overeenkomt, wordt rekening gehouden met de spoelen waar door de elektrische stroom wordt gevoerd en die de verticale begrenzing vormen. Dit wordt gedaan door de eis te stellen dat langs deze cylindervormige begrenzing de veldsterkte verticaal gericht is.

In dit geval vereist de oplossing iets gecompliceerder methoden.

2. OPLOSSING VAN HET VEREENVOUDIGDE PROBLEEM.

Gevraagd wordt een oplossing van de vergelijking van Laplace in cylinderecoördinaten, r, z

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

zodanig, dat φ regulier is in de gehele ruimte en dat voor $z = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_{i=0}^n \alpha_i r^{2i+1}$$

waarbij α_i ($i=0, \dots, n$) gegeven getallen zijn.

In plaats van cylinderecoördinaten voeren wij bolcoördinaten in

$$r = R \sin \theta,$$

$$z = R \cos \theta,$$

waardoor de vergelijking van Laplace overgaat in

$$\sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} \text{ voor } z=0, \varphi$$

Wij bouwen nu, analoog aan de gegeven vorm van ~~in~~

op uit homogene veeltermen, van de vorm $\varphi_i = R^i P_i(\cos \theta)$

Substitutie levert de vergelijking voor de polynomen van Legendre [1, p. 115]

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{dP_i}{d\mu} \right\} + i(i+1) P_i = 0$$

waarbij $\mu = \frac{z}{r} = \cos \theta$ is.

Kenwaardige functies worden alleen verkregen voor even waarden van $i, i = 2\nu$ [1, p. 104]

$$P_{2\nu}(\mu) = (-1)^\nu \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2\nu} \left[1 - \frac{2\nu(2\nu+1)}{1 \cdot 2} \mu^2 + \frac{2\nu(2\nu-2)(2\nu+1)(2\nu+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mu^4 - \cdots \right]$$

sodat wij een rij polynomen krijgen van de vorm:

$$R^{2\nu} P_{2\nu} \left(\frac{z}{r} \right) = (-1)^\nu \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2\nu} \left[(z^2+r^2)^\nu - \frac{2\nu(2\nu+1)}{1 \cdot 2} (z^2+r^2)^{\nu-1} \frac{z^2}{r^2} + \cdots \right] = F_\nu(r, z)$$

Verder wordt voor $z = 0$

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} F_\nu(r, z) \right]_{z=0} = (-1)^\nu \frac{(2\nu-1)!}{2^{2\nu-2} \{(\nu-1)! \}^2} r^{2\nu-1}$$

Indien wij als oplossing stellen

$$\varphi(r, z) = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu F_\nu(r, z)$$

wordt

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{z=0} = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu (-1)^\nu \frac{(2\nu-1)!}{2^{2\nu-2} \{(\nu-1)! \}^2} r^{2\nu-1} = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu r^{2\nu-1}$$

dus

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu \frac{(-1)^\nu 2^{2\nu-2} \{(\nu-1)! \}^2}{(2\nu-1)!}$$

en de oplossing wordt

$$\varphi(r, z) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \frac{(-1)^\nu 2^{2\nu-2} \{(\nu-1)! \}^2}{(2\nu-1)!} F_\nu(r, z)$$

Verder is

$$F_\nu(r, z) = (-1)^\nu \frac{(2\nu-1)!}{2^{2\nu-2} \{(\nu-1)! \}^2} \left\{ (z^2+r^2)^\nu - \frac{2\nu(2\nu+1)}{1 \cdot 2} (z^2+r^2)^{\nu-1} \frac{z^2}{r^2} + \cdots \right\}$$

sodat

$$\varphi(r, z) = \alpha_1 \left\{ (z^2+r^2) - 3z^2 \right\} + \frac{\alpha_2}{4} \left\{ (z^2+r^2)^2 - 10(z^2+r^2) \frac{z^2}{r^2} + \frac{35}{3} z^4 \right\} + \cdots$$

$$= \frac{\alpha_1}{2} (r^2 + z^2) + \frac{\alpha_2}{12} \{ 3r^4 - 24r^2 z^2 + 8z^4 \} + \cdots$$

Dese oplossing kan nog eenvoudiger worden gevonden door met voorlopig onbepaalde coëfficiënten met inachtneming van de symmetrie te stellen

$$F_\nu(r, z) = r^{2\nu} + \gamma_1 r^{2\nu-2} z^2 + \gamma_2 r^{2\nu-4} z^4 + \cdots + \gamma_{\nu-1} z^{2\nu}$$

en de coëfficiënten $\gamma_1, \dots, \gamma_{\nu-1}$ te bepalen door substitutie in de vergelijking

$$\frac{\partial^2 F_\nu}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\nu}{\partial r} + \frac{\partial^2 F_\nu}{\partial z^2} = 0.$$

3. OPLOSSING VAN EEN BETER BIJ DE WERKELIJKHEID AANSLUITEND PROBLEEM.

In dit geval wordt gevraagd een oplossing van de vergelijking van Laplace

$$\Delta \varphi = 0$$

met de randvoorwaarden

$$z=0, \quad r < a$$

$$r=a$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_0^n \alpha_n r^{2n+1} = f(r)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$$

die regulier is binnen de cylinder $r = a$ en waarvoor $\varphi(z) = \varphi(-z)$.

Een particuliere oplossing kan verkregen worden door in de vergelijking

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

in te vullen $\varphi = \rho(r) \cdot Z(z)$

Dan moeten $\rho(z)$ en $Z(z)$ voldoen aan

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dr} = -\lambda^2 \rho,$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda^2 Z,$$

waarin λ een zekere, reële of complexe constante is.

De algemene oplossing van de eerste vergelijking wordt geleverd door de functies van Bessel van de orde nul.

$$\rho = A Y_0(\lambda r) + B Y_0(\lambda r)$$

Indien φ voor $r = 0$ regulier is moet $B = 0$ zijn, zodat wij vinden

$$\rho = A' Y_0(\lambda r)$$

Verder is de algemene oplossing van de tweede vergelijking, die niet oneindig wordt voor grote $|z|$ en een even functie is van z

$$Z = A'' e^{-\lambda |z|}$$

zodat wij als particuliere oplossing vinden

$$\varphi(r, z) = A Y_0(\lambda r) e^{-\lambda |z|}$$

waarbij $A = A' A''$ een willekeurige constante is.

Indien wij nu de voorwaarde, dat voor $r = a$ $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$ moet zijn, substitueren, verkrijgen wij

$$\lambda A Y_0'(\lambda a) e^{-\lambda |z|} = 0$$

voor alle z , d.w.z.

$$Y_0'(\lambda a) = -Y_1(\lambda a) = 0$$

Hieraan wordt voldaan door een oneindig systeem van eigenwaarden

$$\lambda_n a = \mu_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

als μ_n het n^{de} nulpunt van de functie J_1 is.

Wij vinden dus als oplossingen

$$\varphi_n(r, z) = A_n J_0(\mu_n r/a) e^{-\mu_n |z|/a}$$

en voor

$$z = 0$$

$$\varphi_n(r) = A_n J_0(\mu_n r/a), \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} = -\frac{\mu_n}{a} A_n J_1(\mu_n r/a).$$

Om de voorgeschreven gedaante van $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ voor $z = 0$ op te brengen, ontwikkelen wij de gegeven functie $f(r)$ in een Fourier - Besselreeks, gebruik makend van de orthogonaaliteitsrelatie tussen de functies $J_1(\mu_n t)$ waarbij $t=r/a$. Immers, uit de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 J_1(\mu_n t)}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt} J_1(\mu_n t) + (\mu_n^2 - \frac{1}{t^2}) J_1(\mu_n t) = 0$$

volgt

$$(\frac{1}{t} - \mu_n^2 t) J_1 = - \frac{d}{dt} \left\{ t \frac{dJ_1}{dt} \right\},$$

zodat

$$(-\mu_m^2 + \mu_n^2) t J_1(\mu_n t) J_1(\mu_m t) = J_1(\mu_m t) \frac{d}{dt} \left\{ t \frac{dJ_1(\mu_n t)}{dt} \right\} - J_1(\mu_n t) \frac{d}{dt} \left\{ t \frac{dJ_1(\mu_m t)}{dt} \right\}$$

en door integratie

$$(\mu_n^2 - \mu_m^2) \int_0^1 J_1(\mu_n t) J_1(\mu_m t) t dt = 0$$

Hieruit, volgt, voor $n \neq m$

$$\int_0^1 J_1(\mu_n t) J_1(\mu_m t) t dt = 0.$$

Verder geldt [1, p. 146] voor $n = m$

$$\int_0^1 J_1^2(\mu_n t) t dt = \frac{1}{2} J_0(\mu_n t) J_2(\mu_n t)$$

Indien wij nu stellen

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n J_1(\mu_n r/a),$$

vermenigvuldigen met $J_1(\mu_m r/a)$ en integreren, vinden wij

$$\int_0^a f(r) J_1(\mu_m r/a) dr = \beta_m \int_0^a J_1^2(\mu_m r/a) r dr = -\beta_m a^2 \frac{1}{2} J_0(\mu_m) J_2(\mu_m)$$

zodat

$$\beta_m = - \frac{2 \int_0^a f(r) r J_1(\mu_m r/a) dr}{a^2 J_0(\mu_m) J_2(\mu_m)}$$

Het kan nu bewezen worden [2, p. 576], dat indien $f(r)$ voor $0 \leq r \leq a$ continu differentieerbaar is en voldoet aan de eis $f(a) = 0$, de reeks

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n J_1(\mu_n r/a)$$

gelijkmatig convergent is in het interval $0 \leq r \leq a$ en dat

voor grote n $\beta_n \sim \frac{1}{n}$.

Stellen wij nu

$$\varphi(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\mu_m \frac{r}{a}) e^{-\mu_m |z|}$$

dan vinden wij de coëfficiënten A_m door

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=0} = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m}{a} A_m J_1(\mu_m \frac{r}{a})$$

te identificeren met

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n J_1(\mu_n \frac{r}{a})$$

dus

$$A_m = \frac{-a\beta_m}{\mu_m} = \frac{2 \int_0^a f(r) r J_1(\mu_m \frac{r}{a}) dr}{a J_0(\mu_m) J_2(\mu_m)}$$

en krijgen dus als oplossing de gelijkmatig convergente reeks

$$\varphi(r, z) = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^a f(r) r J_1(\mu_m \frac{r}{a}) J_0(\mu_m \frac{r}{a}) e^{-\mu_m |z|} \frac{dr}{J_0(\mu_m) J_2(\mu_m)}$$

Indien $f(r)$ een polynoom $f(r) = \alpha_1 r + \alpha_2 r^3 + \dots$ is, kunnen de integralen

$$\int_0^a f(r) r J_1(\mu_m \frac{r}{a}) dr$$

expliciet berekend worden. Wij doen dit alleen voor de laagste machten van r . [Vgl. 1. p.145]

Uit

$$\int x^{p+1} J_p(x) dx = x^{p+1} J_{p+1}(x)$$

volgt, dat

$$\int_0^a r^2 J_1(\mu_m \frac{r}{a}) dr = \frac{a^3}{\mu_m} J_2(\mu_m)$$

en verder

$$\begin{aligned} I_m &= \int x^{2m+2} J_1(x) dx = \int x^{2m} dx^2 J_2(x) = x^{2m+2} J_2(x) - \\ &- 2m \int x^{2m+1} J_2(x) dx = x^{2m+2} J_2(x) - 2m \int x^{2m-2} dx^3 J_3(x) = \\ &= x^{2m+2} J_2(x) - 2m x^{2m+1} J_3(x) + 2m(2m-2) \int x^{2m} J_3(x) dx. \end{aligned}$$

zodat

$$\int_0^a r^4 J_1(\mu_m \frac{r}{a}) dr = \frac{a^5}{\mu_m^3} \int_0^{\mu_m} x^4 J_1(x) dx = \frac{a^5}{\mu_m^3} \left[\mu_m^5 J_2(\mu_m) - 2\mu_m^3 J_3(\mu_m) \right].$$

Indien $f(r) = \alpha_1 r + \alpha_2 r^3 + \dots$

verkrijgen wij als oplossing

$$\begin{aligned} \varphi(r, z) &= 2a^2 (\alpha_1^2 + a^2 \alpha_2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m} \frac{J_0(\mu_m \frac{r}{a})}{J_0(\mu_m)} e^{-\mu_m |z|} + \\ &- 2a^4 \alpha_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m^3} \frac{J_0(\mu_m \frac{r}{a}) J_3(\mu_m)}{J_0(\mu_m) J_2(\mu_m)} e^{-\mu_m |z|} + \dots \end{aligned}$$

De waarden van de functies van Bessel en haar nulpunten kunnen bijvoorbeeld ontleend worden aan Jahnke - Emde, zodat ook in dit geval de potentiaal numeriek berekend kan worden.

Opgemerkt kan nog worden, dat de hier beschreven oplossing, die uit een speciale, min of meer geraden, particuliere oplossing is opgebouwd, systematisch door toepassing van de transformatie van Laplace kan worden verkregen.

LITERATUUR

1. Jahnke - Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven.
4th Ed. Dover. New York, 1945
2. G.N. Watson : The Theory of Bessel Functions
2nd Ed. Cambridge University Press
1944.